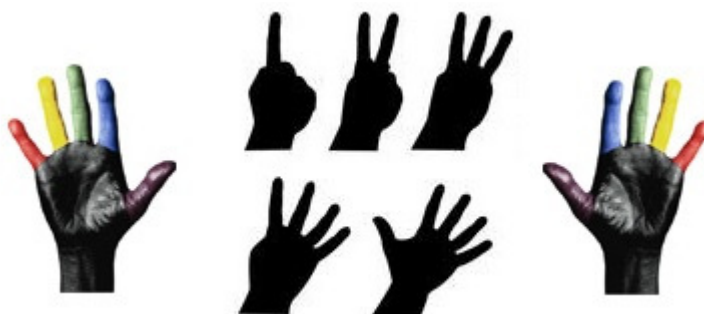


## **Comptar: aprenentatge**



### **Taula**

Què és comptar?.....	2
El nombre natural .....	2
Comptar i nombre natural: dos conceptes molt relacionats.....	3
El llenguatge: un codi de signes.....	3
El comptatge: la llengua i alguna cosa més .....	4
Cardinalitat-ordinalitat.....	4
L'ordre, la transitivitat i els cicles .....	5
Comptar sense nombres .....	5
L'aprenentatge del nombre.....	6
Els nombres a l'entorn .....	10
I el nombre es va fer verb.....	11
L'ús de les operacions.....	12
Prosseguir el comptatge.....	13
Alguns apunts didàctics .....	15
Un interrogant didàctic .....	19
I el nombre es va fer carn .....	20
Resum .....	21

## Què és comptar?

Observem una definició de comptar:

“Comptar” els objectes d’un conjunt és assignar a cadascun dels seus components un símbol (és a dir, una paraula, un gest o un signe gràfic) corresponent a un número agafat de la sèrie natural dels enters, començant per la unitat i procedint en ordre fins al final dels elements de l’esmentat conjunt. Cada símbol o denominació atribuït a cadascun dels objectes del conjunt considerat es denominarà, llavors, pel seu número d’ordre en el conjunt que s’ha transformat en successió. El número d’ordre del darrer objecte d’aquest grup ordenat no és altre que el nombre dels seus elements.  
Ifrah (1997:75)

En aquesta imatge que se’ns fa del fet de comptar hi surten molts elements a considerar:

- és una acció
- és fa d’una manera ordenada
- s’utilitza algun tipus de simbologia
- serveix per quantificar un conjunt

Però que hi ha darrera de comptar? El que hi ha és un concepte important: el de nombre, més concretament el de nombre natural.

## El nombre natural

Com Sant Agustí quan parlava sobre el temps podríem dir una cosa com: “Si no em pregunten què és un nombre natural sé el que és, però si m’ho demanen no sé explicar-ho”. Per exemple, la definició del diccionari Oxford de Matemàtiques no va més enllà de dir:

Un nombre natural és un dels nombres 1, 2, 3...; alguns autors també inclouen el 0. El conjunt dels nombres naturals acostuma a denotar-se **N**.

Al llibre clàssic “Las matemáticas: su contenido, métodos y significados” (Aleksandrov i altres; 1980:26) trobem:

Un nombre (tal com “dos”, “cinc”, etc.) és aquella propietat de les col·leccions d’objectes que és comuna a totes les col·leccions els objectes de les quals poden posar-se en correspondència biunívoca els uns amb els altres, i que és diferent en aquelles col·leccions per a les quals tal correspondència és impossible.



Peter Paul Rubens  
*Les tres gràcies* (1640)



Caitlin Schwerin  
*Tres amis* (2006)



Jorge Salort  
*Tres cabezas* (1998)

Els mateixos autors afegeixen a continuació d’aquesta definició un comentari que lliga molt bé amb l’aparició del concepte de nombre que hem comentat a l’apartat històric:

Per a descobrir aquesta propietat i distingir-la clarament –és a dir, per a formar el concepte de nombre i donar-li nom: “sis”, “deu”, etc.- va ser necessari comparar entre sí moltes col·leccions d’objectes. Durant generacions i generacions la gent va repetir la mateixa operació milions de vegades i d’aquesta manera va descobrir els nombres i les relacions entre ells.

Observem que a les dues definicions es fan servir exemples de nombres i que la segona ens fa un petit recorregut històric com el que hem seguit fins ara: de les correspondències, de la comparació, passem als nombres. No es deixen totes dues alguna cosa? Com es passa de la comparació de conjunts a posar un nom a una quantitat concreta d’elements?

## Comptar i nombre natural: dos conceptes molt relacionats

Per formar-se una idea interior de nombre natural cal realitzar moltes vegades l’acció de comptar. L’acció ajuda a formar el concepte.

L’èmfasi en comptar no està fora de lloc, ja que la comprensió del nombre va inseparablement unida al comptar, resulta dubtós si és possible atribuir raonablement una comprensió de cardinalitats concretes (més enllà de tres) a algú que no ha dominat una seqüència de còmput.

Crump (1993:65)

D’alguna manera es pot afirmar que la comprensió del nombre, del seu significat, la obtenim del seu ús (Moreno i Kaput a Alvarado 2005). I el seu ús primer és el comptatge: l’acció de comptar.

## El llenguatge: un codi de signes

Les paraules, en un sentit oral, són signes sonors arbitraris (en quant no tenen una relació amb l’objecte representat com podria ser la que hi ha entre el mateix objecte i el seu dibuix figuratiu). Per tant, si han de servir per la comunicació, han de ser objectes de conveni i transmissió. Si no és així el llenguatge no podria ser comparat.

El llenguatge, en primera instància, s’aprèn per una mena d’enculturació informal (aprofitant el terme proposat per Bishop, 1999, referit a la cultura matemàtica), on intervenen factors com el discurs, la imitació, les interaccions socials, el joc, l’acció cooperativa... Aquesta enculturació informal la fa, bàsicament, la família i la comunitat. Ara podríem afegir també els mitjans de comunicació. Hem d’estar agraïts a aquesta adquisició informal del llenguatge parlat. Imaginem per un moment que els nens i les nenes esperessin pacientment a arribar a l’escola per aprendre a parlar de la mateixa manera que “esperen” per aprendre a llegir o escriure, i que els educadors/es féssim servir una metodologia semblant per facilitar el seu aprenentatge. Trigarien anys en construir una frase! (Pimm,1999)

Les paraules acaben sent mitjancers que recolzen la pròpia formació dels conceptes que representen; els suporten i els formen.

... els signes es converteixen en significants (portadors de significat) ja que vehiculen els significats i, així, fan possible el pensament conceptual i la comunicació.

Alcalà (2002:20)

## El comptatge: la llengua i alguna cosa més

Per comptar els nens i les nenes han d'aprendre, en primer lloc, una quantitat de sons arbitraris que formen paraules i ho han de fer en un ordre determinat. Més tard, a mesura que avencin en la seva capacitat d'anar més enllà en la sèrie numèrica, hauran d'aprendre mots nous i, sobre tot, unes determinades regles de construcció (Moreno i Kaput a Alvarado 2005).

Però no n'hi ha prou amb conèixer els termes i el seu ordre perquè comptar, com hem vist abans, implica tasques d'assenyalament i separació o marcació, perquè els objectes no tornin a ser comptats, al mateix temps que es va dient la llista de paraules (Dickson i altres, 1991). Per tant al comptar:

- fem correspondre un nom a la indicació d'un dels objectes a comptar
- anem assignant els noms successius ordenadament sense tornar a assenyalar objectes ja comptats i sense deixar-nos-en cap
- el darrer nom quantifica la col·lecció.

En indicar el *primer* objecte diem *un*; quan indiquem el *segon* diem *dos*... ordinalitat i cardinalitat se'ns presenten de la mà. Pel que sabem els nens i les nenes també tenen dificultats en separar aquestes dues cares del nombre.

## Cardinalitat-ordinalitat

Per ordenar un conjunt hem d'establir un principi que estableixi una relació que ens permeti determinar entre els seus elements, i un a un, quins van abans i quins després. Hi ha d'haver un element inicial que no segueix a cap altre. No té sentit ordenar per colors, però sí que el tindria agrupar. Però podem ordenar per grandària, per pes, temporalment, per quantitat... Hi ha ordres arbitraris però sotmesos a convenis d'algun tipus, com pot ser l'ordre alfabètic.

Quan ordenem la sèrie dels nombres naturals el criteri és "ser o tenir un més". El conjunt de cardinalitat *dos* conté un element més que el de cardinalitat *u*. El de cardinalitat *tres* un més que el de *dos*. Hi ha una jerarquia d'inclusió: el *quatre* conté al *tres*, al *dos* i a l'*u*; el *cinc* conté al *quatre*, al *tres*, al *dos* i a l'*u*... Aquesta jerarquia d'inclusió no sempre és tinguda en compte per les nenes i els nens quan aprenen a comptar (Carbó i Gràcia, 2002) i és bàsica per prosseguir el comptatge a partir d'un punt determinat.



En aquesta fila hi ha **onze** nens i nenes. El nen encerclat és el **vuitè** començant per l'esquerra o el **quart** començant per la dreta

Si, per exemple, a un nen o nena se li diu que una capsa conté 12 objectes i que se n'hi afegeixen 5, per continuar el recompte s'ha de transformar el cardinal 12 en l'ordinal final del que hi havia. Segons algunes experiències fetes amb canalla entre

6 i 8 anys, aproximadament 1/3 fallaven donant una resposta inferior en una unitat perquè continuaven el comptatge a partir del mateix 12 (**12**-13-14-15-16). Aquest tipus d'error té una doble causa: la manca d'assoliment de la "inclusió de classes" i les dificultats en la transformació de cardinal a ordinal que no és l'acostumada amb el comptatge habitual (d'ordinal a cardinal). (Dickson i altres, 1991).

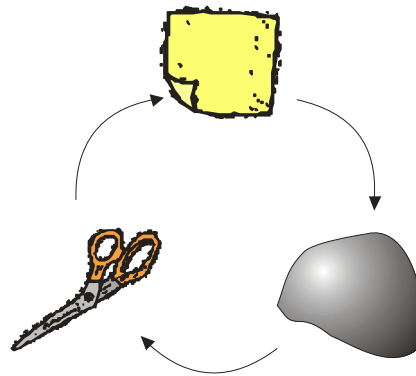
Malgrat tot, pel que sabem totes dues nocions (la cardinal i l'ordinal) es van adquirint simultàniament. Tot i així hem de manifestar que compartim amb Alcalá (2002) la idea de que només disposem d'aproximacions a les formes en que es produeix l'aprenentatge.

## L'ordre, la transitivitat i els cicles

No cal dir que el concepte d'ordre (en quant a seqüenciació) és fonamental en l'aprenentatge dels infants i que es treballa de moltes maneres. Un exemple poden ser cançons recurrents com "El burriquet" (un burriquet que no vol llaurar, un gos que l'ha de mossegar i tampoc vol, un pal que ha de pegar al gos i no ho vol fer...). Les relacions d'ordre les entenem majoritàriament amb relacions de transitivitat del tipus:

**si  $a > b$  i  $b > c$  llavors  $a > c$**

És sempre així? La resposta és que no. Fem servir constantment relacions ordenades cíclicament com, per exemple, els dies de la setmana: el dilluns va abans que el dijous, el dijous que el diumenge, però el diumenge és anterior al dilluns de la setmana següent. L'expressió "la setmana següent" ens diu que hem fet una volta sencera al cicle i que en comencem un segon. Però els nens i les nenes estan acostumats a fer servir relacions d'ordre cíclic en les que no cal "comptar les voltes". Un cas clàssic és el joc de "pedra-paper-tisores" i que, en diferents variants, es juga arreu del món (*Janken* al Japó, *Tillikum* entre els amerindis) (Crump, 1993)



No hauríem d'oblidar aquests aspectes a l'hora de dissenyar seqüències d'aprenentatge.

## Comptar sense nombres

De la mateixa manera que es pot ordenar cíclicament i el concepte de primer, segon o tercer poden quedar relativitzats, també és possible comptar sense numerals, com hem vist en el cas dels aborígens de Papua-Nova Guinea que comptaven seguint una sèrie d'indicacions corporals. Els nens i les nenes també estan acostumats a comptar sense dir la sèrie numèrica. Ho fan amb les cançons de tria o

d'eliminació amb les que es comencen molts jocs. En aquestes cançons es va assenyalant als i les diferents participants, habitualment disposats en rotllana, seguint el ritme d'una cançó (de lletra, normalment, força absurda i en la que, curiosament, sovint hi apareixen també nombres). La canalla no la fa servir només perquè no sàpiga comptar, cosa que només seria útil en els casos dels nens i nenes més petites, sinó que més aviat se'ls hi dona un cert aire atzarós donat que el nombre que es compta queda amagat, no és evident. Encara que segons la cançó, el nombre de participants i depenent també de per qui es comença és perfectament determinable quina serà la persona triada o eliminada. Un exemple que compta fins a 16 és el següent:

Una – mona  
en un – terrat  
que té el – cul  
arreman – gat  
fa pu – dor  
de xoco – lata.  
Un – dos  
tres – quatre

## L'aprenentatge del nombre

Igual que varem fer quan parlàvem sobre la percepció de quantitats i el principi de conservació de quantitat seguirem les idees proposades per les investigacions de Schaeffer, Eggleston i Scott que trobem explicades a Dickson-Brown-Gibson (1991). Recordem que en un primer període (**estadi I**) els nens i les nenes són capaços de:

- reconèixer quantitats en conjunts de 2, 3 i, en ocasions, fins a 4 elements
- diferenciar col·leccions més grans i més petites amb menys de 5 elements disposat de qualsevol manera
- diferenciar col·leccions més grans de més petites si estan convenientment alineades.

En el procés de l'aprenentatge del comptatge haurem d'arribar a combinar els aspectes ordinals i cardinals del nombre en quant hem de comprendre que el darrer ordinal que verbalitzem es correspon amb la numerositat del conjunt comptat, és a dir, la seva cardinalitat.

A l'**estadi II** de Schaeffer el que predominen són els aspectes ordinals, els que es relacionen més amb els aspectes designatius fent correspondències amb la sèrie oral "un, dos, tres...". Amb experiències fetes amb una vintena de nens i nenes d'una edat mitjana de tres anys i cinc mesos es va comprovar que gairebé les  $\frac{3}{4}$  parts comptaven bé grups de fins a set fitxes o cops de timbal fins a 8. Tot i així s'observaven errors com aquests:

- doble recompte de fitxes o bé omissió
- equivocacions en l'assignació dels numerals (salts en l'ordre o repeticions)
- errors de coordinació nom-indicació (indicant dos objectes per un numeral o dos numerals per un sol objecte)

En col·leccions de més de 10 objectes els nens i les nenes de 5 anys fallaven encara en una proporció al voltant del 60%.

Alguns autors apunten que els errors de coordinació s'acostumen a produir perquè l'esforç de recordar la sèrie dels numerals absorbeix gran part de l'atenció de l'infant. Pot confirmar això observar que durant la realització d'algunes de les experiències els nens i les nenes s'autocorregien molt en el procés d'enumeració dels numerals perquè s'adonaven dels seus propis errors "de cantarella". Una altra prova dels esforços que requereix la coordinació nom-indicació és que la pràctica totalitat de la canalla assenyalava amb el dit al comptar (Observat en experiències fetes seguint l'estela de les proposades per Schaeffer). Justament aquest gest d'assenyalar pot arribar a denotar la manca de concepte de cardinalitat. Un exemple pot ser el cas d'un nen que va comptar una filera de sis fitxes, assenyalant-les una per una ordenadament i que, quan se li va cobrir la filera amb una cartolina i se li va demanar "quantes hi havia", va repetir tota la gestualització assenyalant amb el dit les fitxes que ell s'imaginava sota de la cartolina. Un altre exemple en aquesta línia, explicat a una experiència a Argentina que comentarem més àmpliament després, el veiem quan alguns nens o nenes, després de fer un recompte, repetien tot el procés (un, dos, tres...) si se'ls tornava a demanar "quants hi havia". En experiències d'introducció de caramels en una capsula només ho feia bé 1/5 part dels nens i nenes quan la quantitat estava entre 5 i 7 (tot i saber comptar). És com si es fes, més aviat, una estimació global de la quantitat. També la canalla d'aquest estadi no troba indiferent a l'hora de comptar, que no importi per quin element es comença. La importància de l'ordre sobre la quantitat arriba a dominar també en aquest aspecte.

En conjunt en aquest estadi es pot dir que els nens i les nenes són conscients de la importància del recompte però aquest es fa de manera imprecisa i sense establir una connexió clara entre "final de comptatge"-cardinalitat del conjunt, especialment quan les col·leccions passen de quatre elements.

A l'**estadi III** s'assoleix el concepte de cardinalitat. L'estudi de Schaeffer es va fer amb 15 nens i nenes d'una mitjana d'edat de 4 anys i 2 mesos. En aquest estadi s'arriba a considerar la grandària del conjunt com una propietat estable (encara que se la tapi amb una cartolina, per exemple). S'observa també una major seguretat a l'hora de realitzar els recomptes fins a 10 i es reconeix la indiferència sobre quin ha de ser l'element sobre el que es comença el comptatge. Quina és, doncs, la limitació d'aquest estadi?: les dificultats per reconèixer quantitats menors de majors pel nombre que són representades. En aproximadament la meitat dels casos la canalla no identificava el major de dos nombres entre parelles fetes per quantitats de 4 a 10. Aquesta capacitat, la de reconèixer el nombre més gran d'una parella de nombres menors o iguals a 10, s'assoleix a l'**estadi IV** segons experiències amb 17 nens i nenes d'una edat mitjana de 5 anys i mig. Encara que anecdòtic cal comentar els factors distorsionadors que poden afectar aquestes experiències. El meu fill petit a l'edat de sis anys i pocs mesos va ser sotmès pel seu "pare-investigador" a l'experiència de contestar què s'estimava més "si set o nou caramels" i va respondre ràpidament que "set". A la pregunta de "per què" la resposta va ser "és que no em vull posar molt *gordo*". Quan se li va demanar si s'estimava més nou joguines de dinosaure o sis no va tenir cap dubte sobre quin era el nombre més gran.



Experiències més recents, però amb l'estela de les anteriors, fetes a escoles de preescolar i primer grau d'Argentina en zones semiurbanes de baix índex d'alfabetització, mostren una menor comprensió del concepte de nombre (Moreno i Kaput a Alvarado 2005). Es van fer dos tipus de proves, unes per observar els coneixements numèrics a nivell oral, que són les que comentarem ara, i unes altres per observar els relatius a l'escriptura de quantitats. En tot cas, tot i el baix nivell de coneixements globals observats, els resultats eren millor a nivell oral que escrit; fins i tot la capacitat de progressar en les activitats amb ajuda era superior quan el domini oral era més gran. Les proves orals consistien en demanar l'edat, fer dir la sèrie numèrica i quantificar col·leccions simples (de 4, 5, 7, 10, 16 i 23 elements). A l'experiència van participar 22 nens i nenes compresos entre 4 anys i 11 mesos i 7 anys i 9 mesos. Les persones que van realitzar l'experiència no van notar grans diferències entre els grups d'edats tot i abastar una falca propera als tres anys.



Això ens pot fer pensar en el pes educatiu de l'enculturació informal de la que parlàvem al principi.

És interessant observar un resum d'alguns dels resultats obtinguts:

<b>Expressió de l'edat</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Només aproximadament 1/3 la va dir correctament (amb gest o nombres)</li> </ul>
<b>Sèrie numèrica</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sense ajuda només la meitat comptaven bé fins a nombres entre 10 i 15 i només tres infants dels 22 participants passaven del 15.</li> <li>Amb ajuda una mica més de la meitat van progressar en algun grau.</li> </ul>
<b>Comptatge</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Una mica més de la meitat comptaven bé alguna vegada per sobre de 10.</li> <li>Gairebé <math>\frac{3}{4}</math> del grup d'experimentació comptava incorrectament algun conjunt inferior a 10.</li> </ul>

Altres autors com Gelman i Gallistel a l'any 1978 (González, Martínez; 2004) van adaptar els estadis anteriors, més referits a la formació del concepte de nombre, a una forma lleugerament diferent, descrivint cinc principis que denoten els avenços dels nens i les nenes en el comptatge:

- Principi de correspondències un a un:** els nens i les nenes saben assignar un nombre a cada objecte sense deixar-se cap ni comptant-lo dues vegades. Intervenien dos subprocessos:
  - la partició* – es separen física o mentalment els objectes comptats dels no comptats; es fan dos subgrups.
  - l'etiquetatge* – s'assigna ordenadament el nom del nombre corresponent a cada objecte.
- Principi d'ordre estable:** es fa servir la sèrie numèrica en l'ordre correcte sempre. Quan encara no està completament assolida hi ha infants que són capaços de detectar un ordre aleatori en el comptatge (7, 3, 5, 1...) encara que amb dificultats si la seqüència està ordenada però amb salts (1, 2, 4, 6, 7...)
- Principi de cardinalitat:** aquesta noció està adquirida quan es reconeix el darrer numeral dit com la quantificació del conjunt.
- Principi d'abstracció:** els principis anteriors s'apliquen a qualsevol tipus de conjunt, independentment de les característiques físiques dels elements a comptar (reals o imaginaris), al marge de la seva homogeneïtat o heterogeneïtat.
- Principi d'ordre irrellevant:** no es dona importància a l'element pel que es comença a comptar, no importa saltar aleatòriament d'un element a un altre.

Es pensa que els nens i les nenes poden tenir adquirits aquests principis, fins i tot de manera informal, al voltant dels sis anys i es consideren bàsics per entrar fermament al món de les operacions i l'escriptura dels nombres amb sistemes posicionals.

La diversitat d'estratègies de comptatge que apliquen els nens i les nens és molt gran. Fins i tot un mateix individu pot aplicar-ne de diferents segons la situació o el moment. Es poden descarregar exemples molt interessants enregistrats en vídeo per Carme Barba (2005) a

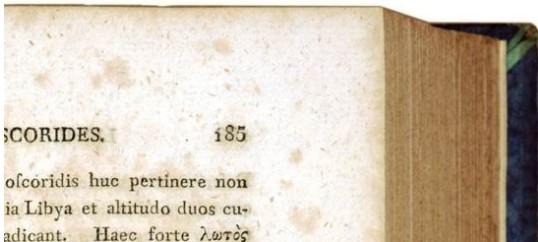



<http://phobos.xtec.es/sgfprp/resum.php?codi=908>



## Els nombres a l'entorn

Els usos socials del nombre varien segons el grau de complexitat i desenvolupament del grup social que observem. Reproduïm una llista proposada per Carbó i Gràcia (2001):

- per determinar un ordre (llistes, paginats, torns...)
- per determinar quantitats (edats, preus, censos o inventaris...)
- per identificar (números de cases, telèfons, canals de TV, DNI, matrícules, codis de barres o postals, PINs, talles, línies de metro o autobús, jugadors d'un equip...)
- per indicar mesures (de temps, temperatures, pesos, longituds, capacitats...)

 <p>SCORIDES. 185</p> <p>ofcórdidis huc pertinere non ia Libya et altitudo duos cu- adicant. Haec forte λωτός</p>	 <p>¿Y NO HAY OTRO CON UN PRECIO MAS PEQUEÑO?</p> <p>250 EUROS</p> <p>Mayo www.e-faro.info</p> <p>EL PRECIO DE LAS COSAS Y EL VALOR DE LAS COSAS PARECEN LO MISMO PERO NO LO SON</p>
	
<p>Ordre</p>	<p>Quantitat</p>
<p>Identificació</p>	<p>Mesura</p>

No en tots els casos que es proposen es fa servir estrictament el nombre natural (els preus o les mesures fan servir extensament les notacions decimals), però sí que ens ajuda a veure que la canalla està immersa en un mar de nombres que farà servir en major o menor grau segons l'edat, però que, com mínim, coneixerà.

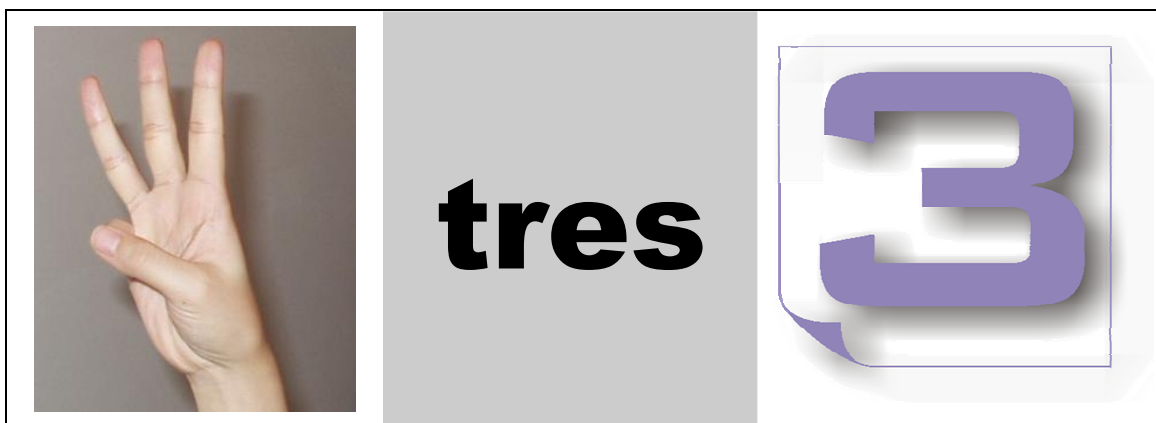
Cal destacar l'ample ús que es fa actualment del nombre amb funcions no quantitatives, identificatives. De fet serà un dels primers usos que la canalla en farà si a casa se'ls hi deixa manipular el comandament a distància de la tele. Aquest primer contacte identificatiu pot distorsionar els aspectes ordinals i cardinals. Pensem que, fins i tot, l'edat que tantes vegades fem repetir als nostres fills i filles quan tenen dos o tres anys (la majoria de vegades gestualment) no deixa de complir una certa funció d'autoidentificació (Pimm, 1999).

Aquesta omnipresència numèrica es fa palesa també en moltes de les activitats diàries de l'aula. Carbó i Gràcia (2001) també ens proposen una llarga llista (votacions, controls d'assistència i de material, organització de festes, calendaris, mesures...) que aconsellen fer servir d'una manera vivencial, per aconseguir una consolidació del concepte de nombre, amb la implicació afectiva dels que han de ser protagonistes de l'aprenentatge.

Però, quins nombres coneixen els nens abans de començar la seva escolarització? O fins a quant saben comptar? ¿Implica el saber comptar un coneixement més profund de les característiques del nombre? No són gaires els estudis fets. Als EEUU es va fer un al 1980 (Dickson-Brown-Gibson, 1991) en que es mostrava que la canalla entre cinc i cinc anys i mig sabia comptar com a mitjana fins a 44, arribant a 84 als sis anys. Es pensa que els nens i les nenes aprenen ràpidament (i amb plaer) a comptar per repetició de pautes verbals. Però això no implica que es formi cap idea de cardinalitat. Difícilment la canalla de cinc anys treballa amb quantitats com 37 o 49, per tant és difícil que sàpiga quina de les dues és més gran. Pot ser il·lustrativa una altra anècdota del meu fill petit (pobre fill de mestres). Sovint juguem a comptar els pals que hi ha a les voreres per dificultar (que no impedir si hi ha una distància mínima però suficient) l'aparcament dels cotxes. És igual quants hi hagi, la cardinalitat l'importa ben poc: el nombre final ha de ser sempre la seva edat: "...quinze, setze i... sis!" (o "quatre!" quan varem començar el joc).

## **I el nombre es va fer verb**

En l'aprenentatge escolar (enculturació formal) es difícil deslligar l'aprenentatge del nombre oral o gràficament. Totes dues representacions acostumen a anar lligades. Entre les primeres quantitats (de l'1 al 9) tan arbitrària podem considerar una simbolització com l'altra. La paraula "tres" està tan deslligada la quantitat (●●●) o de l'ordre (tercer) com la grafia "3". Tot això canvia a partir de (●●●●●●●●●●) on la paraula "deu" encara és arbitrària però la grafia "10" entra en tota una sistemàtica d'escriptura que tractarem en l'aparta sobre escriptura numèrica. Això no implica que la verbalització dels nombres no tingui una sistemàtica pròpia. Aquesta sistemàtica, que hem analitzat a l'apartat històric, és menys hermètica que l'escrita (Carbó i Gràcia, 2001) però, per contra, conté, al menys en català, certes irregularitats que interfereixen en el seu aprenentatge.



Com hem vist anteriorment la sistemàtica de nomenclatura numeral està afectada per principis d'agrupament (desenes, centenes, milers, milions...) i operacionals. Dir "tres-cents quaranta dos" amaga productes i addicions ( $3 \cdot 100 + 40 + 2$ ). L'aprenentatge de la nomenclatura numeral, degut a la seva naturalesa de sistema simbòlic de comunicació, és transmesa: no pot ser sotmesa a descoberta. Això no implica que no hi hagi part de la seva sistemàtica que no sigui observada i descoberta pels nens i les nenes de la mateixa manera que descobreixen altres estructures lingüístiques com l'ús dels plurals, del gènere o dels temps verbals. Alguns dels problemes neixen de les irregularitats, de la mateixa manera com pot passar amb termes com "obrit" en comptes de "obert".

Per poca experiència que tinguem amb canalla petita (com a mestres o com a pares i mares) haurem observat que un cop ben apresada la sèrie de l'1 al 9, o fins i tot quan encara dominen certes inseguretats, els següent escull és ampliar fins al setze. La raó és clara, el sistema encara és irregular tot i que hi hagi una certa recordança fonètica (que per elles i ells no és gens evident). El disset, divuit i dinou no tenen especials dificultats. Alguna vegada ens hem trobat un "dideu" posterior. Les desenes són també irregulars. Un cop aprenem "vint" és fàcil seguir (vint-i-u, vint-i-dos...). Els ulls oberts i interrogants del nens i les nenes ens esperen a l'arribar al "vint-i-nou". Aviat s'adonen d'una regularitat nova: després de dir "...nou" cal afegir una paraula nova. Totes les desenes, en català, són paraules noves. A partir del "cent" la sistemàtica es fa més palesa i la canalla acostuma a ser més gran quan el treballa).

Les irregularitats i les potències noves de la base (cent, mil...) demanen memòria. L'ús de les operacions aritmètiques en demanen alguna cosa més.

## L'ús de les operacions

Les habituals accions d'afegir, aplegar o la de treure formen unes idees inicials d'addició i sostracció que no es completaran fins aproximadament els set anys. Un dels aspectes que completen el concepte de suma o resta és la capacitat de quantificar els canvis produïts.

Dickson-Brown-Gibson (1991)<sup>1</sup> expliquen una experiència feta amb 48 nens i nenes (16 de tres anys, 16 de quatre i 16 de cinc) en la que l'experimentador es col·locava unes poques fitxes a la mà i després de ser comptades eren tapades. A la mateixa mà s'hi col·locaven (o es retiraven de la col·lecció inicial) algunes fitxes

<sup>1</sup> Les idees i experiències que es plantegen a partir d'ara segueixen les línies que exposen en el seu llibre sobre l'aprenentatge de les matemàtiques.

més que també eren comptades. Es demanava el total de fitxes tenint en compte que en cap moment es veien els dos conjunts a la vegada. D'aquesta manera no es podia fer el recompte global de la col·lecció. El 73% dels infants de tres anys, i la totalitat dels de 4 i 5, feien bé el cas 2+1, però en un cas com 5+1 els percentatges baixaven al 20 i 88%, per 3 i 4 anys respectivament, i es mantenia en el 100 pels de 5. Un cas com 4+2 donava uns percentatges d'encert del 7, el 50 i el 81% respectivament. El cas commutatiu 2+4 feia baixar els encerts dels de 4 anys al 25% i al 81% dels de 5. La resta, en general proporcionava resultats més baixos. Per triar un exemple, els graus d'encert en el cas 6-2 (que donava resultats inferiors a 6-4, resta que es fa amb una parella de nombres més "propers") era del 7, el 19 i el 56%.

Les autores valoren globalment positius aquests resultats ja que són molts els casos ben resolts. També observen que, especialment en el cas dels més grans, molts dels problemes els resolien "prosseguint el comptatge".

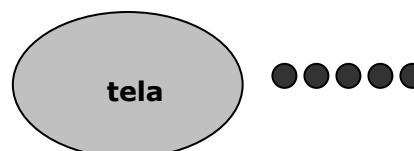
També s'expliquen altres experiències de sumes i restes amb nombres inferiors a la desena en les que s'observen els millors resultats amb nombres petits (entre 1 i 4) i en els que es veuen o s'imaginen objectes. Els pitjors resultats, amb diferència, es produeixen amb les operacions amb nombres abstractes (per exemple demanant "quantes són tres més dos?"). Un exemple dels resultats obtinguts ens mostra que només 6 nens/es de 60 són capaços de resoldre l'operació abstracta 5+1 i només 4 la de 1-1. S'observa en aquests experiments també que els problemes de restes amb recompte regressiu són més difícils que els de comptatge progressiu.

Els nens entre 6 i 8 anys, segons una altra experiència feta amb 150 nens/es, resolen relativament bé problemes d'addició amb nombres petits, especialment si poden manipular objectes. Al voltant del 40% dels que van donar respostes correctes ho feien, però, per "comptatge complet", des del principi. Només un 7% ho feia comptant a partir del nombre més gran i un altre 7% comptant a partir del primer nombre donat. Altres estratègies "minoritàries" es basaven en *fets memoritzats* (recordar que 6+8 són 14) o *fets deduïts* (com resoldre la mateixa suma que abans descomponen:  $8+6 = [8+2]+4 = 10+4 = 14$ ).

## Prosseguir el comptatge

Pel que veiem la capacitat de continuar comptant a partir d'una primera quantitat és una habilitat estratègica important per realitzar exitosa i relativament ràpidament la suma. Per tant ha estat objecte d'investigacions. Les que s'han realitzat als EEUU a la dècada dels 80 del segle XX mostren diferents models de recompte per resoldre un problema com aquest:

Es mostra una taula amb fitxes enganxades i una tela. Es compta un petit subgrup de fitxes i es tapen amb la tela. Es demana quantes hi ha en total (entre tapades i destapades)



Es van categoritzar cinc tipus de comptatge, tres més minoritaris, que només va fer servir aproximadament 1/3 de la canalla, i dos, que aquí presentarem unificats, més àmpliament usats.

Menys usats (s'inicia el comptatge des de l'1)	Perceptual	El comptatge és totalment manipulatiu i no es pot treballar amb objectes ocults
	Figuratiu	Els nens/es s'imaginen els objectes tapats i hi ha alguna mena de gestualització que ho reflexa, però no coordinen bé imatge-informació.
	Motor	S'imaginen els objectes tapats i els compten però no gestualitzen
Més usats (es prossegueix el comptatge)	Verbal-Abstracte	Es prossegueix el recompte sense tornar-lo a iniciar des del principi

Es va observar que alguns nens i nenes que comptaven en "abstracte" retornaven al comptatge des del primer objecte si es destapava una altra vegada el primer subgrup (dóna més seguretat?). Repeticions d'aquesta experiència van mostrar resultats similars i en alguns casos es va veure que no era difícil "entrenar" la prossecució del comptatge. També es va observar, i aquest aspecte em sembla especialment destacable, que hi havia una correlació entre les habilitats en el comptatge i les relatives a la resolució de problemes d'enunciat (additius i sostractius) senzills.



*Imatge d'un dels vídeos de Carme Barba*

Pel que observem el *comptatge progressiu* és una fita important en l'aprenentatge matemàtic. Per arribar-hi s'ha de dominar la transformació ordinal → cardinal i la jerarquització de la sèrie natural (el tres inclou al dos i a l'u, el quatre al tres, al dos i a l'u...), jerarquització que Piaget anomenava *inclusió de classes*.

Un aspecte important del comptatge és també el domini del comptatge regressiu, cap a endarrere, ja que tindrà un cert pes en la comprensió de la l'operació de restar. Barba i Calvo (2006) ens proposen una interessant seqüència pel domini dels comptatges progressiu i regressiu:

1. Comptar cap endavant
2. Dir el nombre següent
3. Dir el nombre anterior
4. Comptar cap endarrere

El fet de posar com a pas anterior al comptatge regressiu el fet de "dir el nombre anterior" es justifica per la gran quantitat de casos en els que els nens i les nenes reconstrueixen tot el recompte des de l'u per contestar a una pregunta del tipus. "quin és el nombre anterior a tretze?".

## Alguns apunts didàctics

Totes les experiències explicades semblen orientar cap a unes certes pautes didàctiques (Dickson-Brown-Gibson,1991):

- La canalla arriba a l'escola amb un bagatge d'enculturació matemàtica informal que inclou un cert coneixement de la sèrie numèrica (d'una forma més ordinal que cardinal) i de les operacions d'addició i sostracció que hauria de ser aprofitat.
- Els nens i les nenes evolucionen d'una manera natural cap el *comptatge progressiu* i acabaran substituint-lo més tard per mètodes més elaborats com "els fets recordats" o "els fets deduïts", però el treball amb problemes adequats ajudarà a accelerar aquest procés.
- Els infants poden realitzar grans progressos operant directament amb objectes (tant reals com "mentals") abans de passa a la simbolització.
- Sembla interessant observar si es dominen les tècniques de *comptatge progressiu* i *comptatge regressiu* abans d'iniciar un treball formal sobre la suma i la resta.

Per altra banda Carbó, Gràcia (2002) i Barba (2004) advoquen per una inclusió d'activitats vivencials, que surtin del dia a dia de l'aula o de l'entorn, de contexts propers als nens i les nenes, que, fins i tot, en alguns casos despertin sentiments .

Són molts els moments del dia en que treballem aspectes matemàtics. Quan es reparteix el material, quan contem quants alumnes no han vingut, quan fem parelles per sortir de l'escola, quan apaguem les espelmes del pastís d'aniversari, quan prenem decisions mitjançant una votació... No cal inventar gaire situacions fictícies, els nombres estan presents en les situacions més quotidianes. Els alumnes aprenen d'aquestes situacions, principalment si hi ha intencionalitat per part dels mestres. Per exemple una activitat tan simple com repartir material es pot plantejar de diverses maneres:

- Donem al nen o la nena els llapis que necessita per la seva taula.
- Li diem el nombre de llapis que ha d'agafar.
- Li donem la consigna que porti 1 llapis per cada persona de la seva taula.

Segons el plantejament que triem estarem afavorint aspectes diferents

Carme Barba (2005:19)

A les seves publicacions podem trobar activitats i materials que concreten les seves propostes i que van molt més enllà del camp del comptatge que estem estudiant en aquest capítol. També podem trobar a internet interessants mostres de petites aplicacions informàtiques interactives. Per exemple als següents webs:

- **Let's count** (<http://math.rice.edu/~lanius/counting/index.html>) Podem trobar algunes activitats traduïdes al castellà. Pertanyen a un projecte més ampli creat per Cinthya Laniu's.
- **Matechavos** (<http://puemac.matem.unam.mx/>) Conté una secció "Échale co-co" amb algunes activitats de comptatge molt interessants. Especialment "el caminito del zoológico", "Los conejos hambrientos"
- **Vols jugar?** (<http://www.xtec.cat/~dvert/mates.htm>) Entre moltes activitats per educació infantil fetes amb *flash* hi trobarem una petita col·lecció sobre nombres i comptatge. L'autora de la pàgina és Dolça Vert.

Tot i així res millor que l'experimentació real de comptar amb objectes palpables (separables físicament o no separables, com els dibuixats) per millorar les seves capacitats de còmput.

Segons Marja van de Heuvel-Panhuizen (2001) a nivell preescolar, i amb nombres fins a deu, en el disseny d'activitats d'aprenentatge cal també diferenciar tipus de comptatge i nivells de proposta-resolució de problemes

### • Tipus de comptatge

Hi ha dos aspectes en l'aprenentatge del comptatge que, tot i el seu lligam, cal treballar en algun moment separatament: el *comptatge acústic* i el *resultatiu*. El *comptatge acústic* (que alguns autors com Brousseau no consideren pròpiament un comptatge) consisteix, senzillament en saber recitar la llista de nombres ordenadament, mentre que el *resultatiu* és el que fem per donar una resposta de tipus quantificador. Com hem comentat anteriorment alguns dels errors inicials en l'acció de comptar es deuen a factors de coordinació entre la indicació i el nomenament quan aquest darrer exigeix un esforç especial.

Un major domini de la sèrie numèrica afavorirà la reducció d'aquests tipus d'errors. El *comptatge acústic* (progressiu i regressiu) es pot treballar molt bé amb poemes i cançons (com les de "l'elefant que es gronxa" o "les pometes")

**Un, dos, tres,  
ja l'he pres;  
dos, tres, quatre,  
cap a la butxaca;  
tres, quatre i cinc,  
ja l'hi tinc.**

Aquest dos tipus de comptatge no es desenvolupament al mateix temps. De fet és més fàcil anar més lluny, inicialment, en l'*acústic* que en el *resultatiu*.

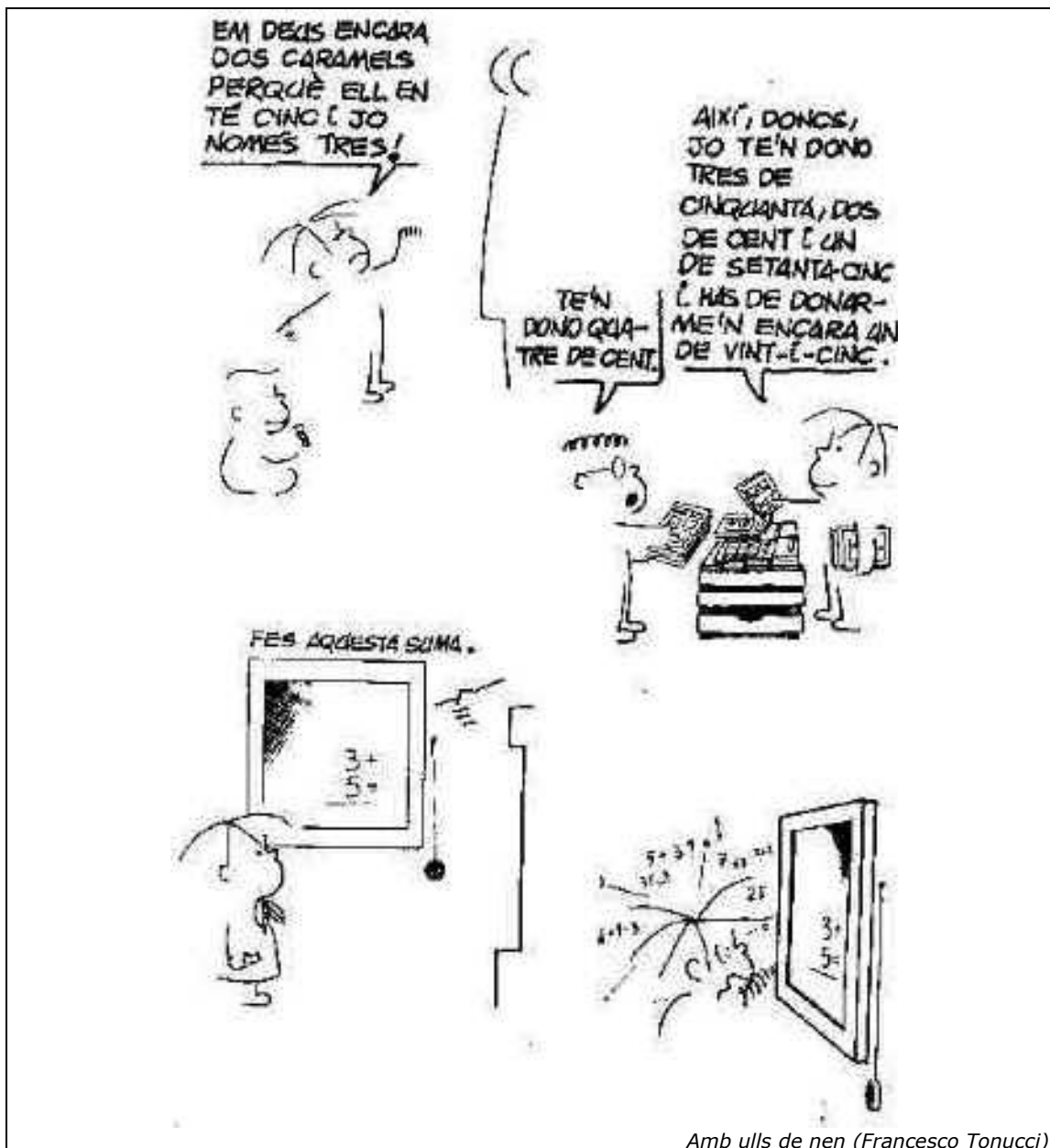
### • Nivells de proposta-resolució de problemes de comptatge resultatiu

- Sense demanar directament una quantitat total – Els problemes d'aquest nivell no fan servir d'una manera directa la pregunta "Quants?". Es poden proposar problemes d'ordre, de comparació, d'estimació, de "posar-treure"... Un joc de cursa amb daus amb la pregunta "com puc arribar de lluny?" o "com és d'alta aquesta torre?" amb una torre feta amb blocs defugen la pregunta directa de quantificació. El comptatge sincronitzat que s'exerceix en aquestes activitats té una funció significativa relacionada amb alguna acció (moviment d'un joc, comprar...).
- Demanar quantificacions comptant amb objectes reals – En aquest nivell es poden proposar problemes orientats directament a la quantificació de col·leccions però realitzant el comptatge amb materials concrets i manipulables (visibles o coberts, ordenats linealment, en cercle o fent patrons i desordenats). Ja no cal demanar davant d'una



torre de blocs "com és d'alta?" sinó que ja podem preguntar "Quant bloc hi ha apilats?".

- Demanar quantitats treballant amb nombres – Arribem a un nivell on el recompte es fa "pur", sense objectes. "Quants són 7 menys 4?". Això no vol dir que el nen o la nena no pugui fer servir tècniques de representació com poden ser els dits.



Brousseau (2000), a un altre nivell, ens proposa una situació-problema que caracteritza el coneixement matemàtic "saber comptar amb nombres naturals" i que proposa adaptar tenint en compte les edats dels nens i les nenes (entre 3 i 7 anys):

"Tenim pintures en aquests potets. Has d'anar a buscar allà pinzells i posar-ne un a cada pot. Has de portar tots els pinzells en un sol viatge. Cal que cada pot tingui un sol pinzell i que no te'n sobrin ni et faltin pinzells. Si t'equivoques tornes a agafar tots els pinzells, els portes allà i ho intentes de nou"

Podem veure també al material annex de Carme Barba (2005) activitats d'aquests tipus acomodant ninotets en diferents vehicles.



La Zaira comença agafar els *clips*...



... i n'agafa 4 en una sola vegada



Pot omplir el cotxe amb un sol viatge...la Zaira ha comptat

*Fotografies i comentaris del material annex de Carme Barba (2005)*

Per a Brousseau si la canalla realitza aquesta operació correctament es pot dir que "sap comptar".

El nombre ja no és l'objecte explícit de la pregunta sinó el mitjà implícit de respondre-hi.

Brousseau (2000:9)

Si es vol fer que el nombre aparegui d'una manera explícita s'ha de canviar lleugerament l'activitat transformant l'*autocomunicació* del nen o la nena resolutora en veritable *comunicació*: li haurà de dir a un altre/a company/a quants objectes (pinzells, clic...) haurà d'agafar. Brousseau afegeix que es podrà dir que l'infant sabrà comptar si fa bé els dos papers, el d'emissor i el de receptor, amb una condició suplementària: seguretat.

## Un interrogant didàctic

Els sistemes construcció de nomenclatura dels numerals i de la notació escrita que fem servir actualment tenen algunes diferències importants:

- el concepte de base és més profund en la numeració escrita; en la sistemàtica oral funciona només parcialment, gairebé es pot parlar més de l'existència d'agrupaments jeràrquics o inclusivament de base.
- en la sistemàtica de notació escrita no hi ha irregularitats, en l'oral sí (el cas dels primers nombres després de deu, els noms de les desenes...).

Però malgrat aquestes diferències també tenen "zones pròximes":

- l'agrupament per desenes, centenes i milers (primers usos de la base) té un pes important malgrat les irregularitats.
- el sentit de lectura de la notació numèrica i el de nomenclatura del numeral són els mateixos (pensem, per exemple, que a la notació àrab antigament això no era així).

Els nens i les nenes semblen descobrir aviat les pautes verbals de la construcció dels nombres i, fins i tot, ràpidament són conscients de les irregularitats: quan arriben a un nombre com "vint-i-nou" ja demanen ajuda perquè saben que aquí vindrà un canvi de nom que no serà "vint-i-deu". Sense ser conscients de la grandària dels nombres que poden arribar a comptar, sense tenir la capacitat de comparar-los per parelles per dir quin és el més gran, sí que construeixen "la cantarella" (comptatge acústic) amb relativa facilitat un cop ben apresada la seqüència d'u a nou. Una de les possibles raons de que els nens i les nenes aprenguin d'una manera relativament ràpida la llista dels numerals és que mantenen una estructura additiva més clara que la notació escrita que es basa més en la combinació de productes i sumes. Aquesta estructura pot afavorir l'aparició d'errors com aquest per l'escriptura de 24 (si el 20 es "té al cap"):

vint-i-quatre → 204

L'experiència de molts anys fa que, a les primeres etapes educatives, la pràctica més comuna sigui treballar amb nombres molt petits per anar-los ampliant a poc a poc i, a més, fortament recolzats en la seva expressió escrita. Però la paraula "dos" és molt anterior al signe "2" que implica un nivell superior de simbolització que la paraula, ja que "2" representa, a la vegada, el nombre i el mot. Els nens i les nenes arriben oralment una mica més lluny en el treball de construcció numèrica que el que se'ls hi permet treballant les dues representacions de manera simultània. La grafia reté, en cert grau, la volada numèrica. Volada que, per altra banda, s'ha de basar en el fet de comptar objectes i en significar els nombres amb els que es conviu i treballa. Per altra banda, encara que hi ha alguns treballs fets<sup>2</sup>, no s'han estudiat amb prou profunditat els ponts i les interferències entre les estructures oral i escrita de simbolització de les quantitats. En tot cas hauria de ser objecte d'una recerca independent a aquesta que estem fent.

## I el nombre es va fer carn

El treballar amb nombres ens va familiaritzant amb ells, fins al punt d'atorgar-los-hi una certa substància real, de provocar una pèrdua d'abstracció. Per molts de nosaltres, i també pels nens i les nenes ben aviat, "els nombres corrents amb els que comptem, 1, 2, 3, ..., són més reals, més concrets i sens dubte més familiars que la muntanya de l'Everest o el Taj Mahal"<sup>3</sup>.

Els nombres naturals tenen unes característiques tals que, tot i formar un sistema formal independent de la realitat, surten i es nodreixen d'ella, fins al punt que els podem usar sense ser conscients d'aquesta abstracció.

Si bé Pitàgores deia que totes les coses són nombres, és millor interpretar que tots els nombres són coses.

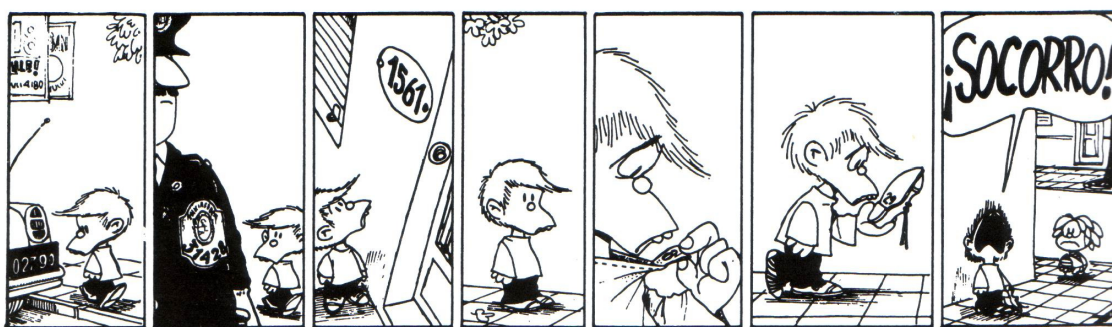
Thomas Crump, (1993:146)

<sup>2</sup> Aquest tema es tornarà a tractar en el capítol sobre escriptura numèrica.

<sup>3</sup> DEVLIN, KEITH. (2002): *El lenguaje de las matemáticas*. Ediciones Robinbook. Barcelona. Pàgina 26.

El concepte de nombre és una construcció mental però neix fortament lligada a la interacció amb la realitat. I el treball constant amb nombres, la seva contínua aparició en la nostra vida diària, els confereix gairebé un caràcter objectual. Pensem, per un moment, en quantes vegades diem o escrivim numerals en un sol dia (al marge de les tasques escolars o acadèmiques). És clau que les activitats de comptatge, que tot i relacionar-se amb aspectes de pura transmissió cultural importants (com els noms o, posteriorment, les grafies dels nombres), ajudin a fer aquesta construcció personal abstracto-real del nombre. El nombre no només s'ha d'aprendre sinó aprehendre.

Encara hi ha un altre aspecte que reforça aquest caràcter pseudoreal dels nombres i és la possibilitat de treballar amb ells. Amb les quantitats es poden "fer coses" com augmentar-les afegint quantitats diferents o repetides, disminuir-les traient, repartint... Fins i tot podem fer prediccions (em falten "tants" per tenir "tants", si cada dia guardo "tants" després de "tants" dies tindrè "tants"). Aquesta possibilitat d'operar directament amb els nombres els hi confereix una certa tangibilitat que no tenen altres conceptes abstractes.



Todo Mafalda (Quino)

## Resum

El concepte de nombre és una abstracció feta a partir de l'observació de conjunts amb la mateixa cardinalitat. Però la mesura d'aquesta cardinalitat es fa amb l'acció de comptar, que consisteix en assignar biunívoca i ordenadament un nom, segons una sèrie establerta i acordada, a cadascun dels elements del conjunt. L'últim nom dit es correspon amb la cardinalitat del conjunt, el quantifica. Per dominar la tècnica del comptatge s'han de superar diferents estadis que, en diferents moments, impliquen:

- saber separar els elements comptats dels no comptats sense repetir ni deixar-se cap
- dominar la sèrie numèrica perfectament (*comptatge acústic*)
- saber que el darrer numeral dit es correspon amb la cardinalitat del conjunt (un dels punts claus del *comptatge resultatiu*, per donar un resultat)
- saber aplicar aquesta tècnica a qualsevol tipologia d'objectes
- saber que no importa l'ordre en que es van comptant els elements

Pel que sembla els nens i les nenes superen aquests estadis d'una manera natural però ho fan més ràpida i eficientment amb l'ajut d'activitats ben dissenyades i basades en situacions properes i vivencials. També si el comptatge és una activitat habitual. Un dels moments en que sabem que la tècnica del comptatge és domina és quan es sap fer el recompte progressiu, a partir d'una quantitat donada. Aquesta capacitat es pot observar amb la realització d'experiències "d'objectes tapats":

- es mostren uns objectes i es fan comptar
- es tapen i al costat se n'afegeixen alguns més
- es demana el total
- s'observa si es continua comptant a partir de la quantitat recordada o s'aplica algun altre mètode, com comptar una altra vegada des d'u imaginant-se els objectes tapats.

Un problema tipus que permet saber si es domina el comptatge en general pot ser un que proposi l'establiment de correspondències biunívokes però sense permetre l'acció d'aparellament, per exemple amb un esquema similar a aquest:

- es presenten separades una col·lecció de recipients i una altra d'objectes.
- es demana posar un sol objecte a cada recipient.
- s'han d'observar els recipients i anar a buscar tots els objectes a col·locar en un sol viatge.
- no podran sobrar ni faltar objectes.

Així com el comptatge progressiu està directament relacionat amb les operacions additives (i indirectament amb les sostractives) és important dominar el comptatge regressiu per preparar un terreny més fèrtil a la introducció de la resta.

Paral·lelament, a mesura que s'aprèn a comptar, es va formant el concepte de nombre natural, en el seus dos aspectes: cardinal i ordinal. El *nombre* es va abstractant i independitzant progressivament dels *objectes* que són comptats. Aquesta familiarització progressiva amb el nombre, omnipresent en el nostre entorn adult però també en l'infantil, li va conferint, a la vegada, d'una certa caracterització objectual que, sense arribar a convertir-lo en un objecte concret i tangible, sí que el convertirà en un concepte amb el que es "poden fer coses", "treballar": operar, en definitiva.